ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 74

Α4. **α)** Ψευδής

β) Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Όμως το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει αφού: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

Α5. **α)** Σ

β) Σ

γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-3}=\dfrac{3x_2+1}{x_2-3}$

$\Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3)$

$\Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3$

$\Leftrightarrow 10x_1=10x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$

άρα η f είναι 1-1, κι αντιστρέψιμη

Β2. Για $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ έχουμε

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{3x+1}{x-3}\Leftrightarrow yx-3y=3x+1$

$\Leftrightarrow (y-3)x=3y+1$ (1) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $y-3=0\Leftrightarrow y=3$ τότε η(1) γίνεται $\Longrightarrow 0\cdot x=10$ αδύνατη, άρα $3\notin f(\mathbb{R}-\{3\})$

- Αν $y \neq 3$, η (1)$\Leftrightarrow x = \dfrac{3y+1}{y-3}$

Συνεπώς πρέπει $x \neq 3 \Leftrightarrow \dfrac{3y+1}{y-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3y+1 \neq 3y-9 \Leftrightarrow 1 \neq -9$ άρα $y \in \mathbb{R}$

Τότε $f(\mathbb{R}-\{3\}) = \mathbb{R}-\{3\} = D_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+1}{y-3}$ Για y=x :$f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$

Επίσης $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}-\{3\}$

και $f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$, άρα $f = f^{-1}$

B3. Για να ορίζεται η fof πρέπει $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \dfrac{3x+1}{x-3} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα $D_{fof} = \mathbb{R}-\{3\}$ και

$$(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{3\dfrac{3x+1}{x-3}+1}{\dfrac{3x+1}{x-3}-3} = \frac{\dfrac{9x+3+x-3}{x-3}}{\dfrac{3x+1-3x+9}{x-3}} = \frac{10x}{10} = x$$

B4. Για x κοντά στο $-\dfrac{1}{3}$: $\left|\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(x)|\left|\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right| \leq |f(x)|$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| \leq |f(x)|$$

$$\Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$$

με $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{3x+1}{x-3} = \dfrac{3\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{-\frac{1}{3}-3} = \dfrac{0}{-\frac{10}{3}} = 0$

άρα και $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}|f(x)| = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(-|f(x)|) = 0.$ Συνεπώς από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = \dfrac{1}{2}(B\Gamma)(AM)$

- Από το ορθογώνιο $\overset{\Delta}{OMB}$ έχουμε:

– $\eta\mu\theta = \dfrac{BM}{OB} \Longrightarrow BM = \eta\mu\theta \Longrightarrow 2BM = 2\eta\mu\theta \Longrightarrow B\Gamma = 2\eta\mu\theta$

– $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{OM}{OB} \Longrightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta$ άρα $AM = OA + OM \Longrightarrow AM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα $\; E=\frac{1}{2}2\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)=\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\;\; \theta\in(0,\pi)$

Γ2. Έστω $E(\theta)=\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\;\theta\in(0,\pi)$.

Η E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτμε

$E'(\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)-\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta-1$

$E'(\theta)=0\Leftrightarrow 2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$ διότι $\theta\in(0,\pi)$

Είναι $E'(\theta)\neq 0\Leftrightarrow \theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

Άρα η E'διατηρεί σταθερόπρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ με:

$E'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, άρα $E'(\theta)>0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

$E'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$, άρα $E'(\theta)<0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$E'(\theta)$	$+$	0	$-$
$E(\theta)$	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\theta=\frac{\pi}{3}$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(\theta)=\frac{3}{4},\;\;\theta\in(0,\pi)$ έχει ακριβώς 2 ρίζες θ_1,θ_2 με $\theta_1<\theta_2$

- Η E είναι συνεχής στο$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]=\Delta_1$ και γνησίως αύξουσα . Συνεπώς:

$E(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{\theta\to 0}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

αφού: $\lim\limits_{\theta\to 0}E(\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0}\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)=\eta\mu 0(1+\sigma\upsilon\nu 0)=0$

και $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Όμως $\frac{3}{4}<\frac{3\sqrt{3}}{4}$ άρα $\frac{3}{4}\in E(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $\theta_1\in E(\Delta_1)$ ώστε $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$

Επιπλέον το θ_1 είναι μοναδικό διότι η Ε είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο Δ_1

- Ε συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right) = \Delta_2$,άρα $E(\Delta_2) = \left(\lim_{\theta\to\pi} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

Αφού: $\lim_{\theta\to\pi} E(\theta) = \lim_{\theta\to\pi} \eta\mu\theta[(1+\sigma\upsilon\nu\theta)] = \eta\mu\pi(1+\sigma\upsilon\nu\pi) = 0$

Το $\frac{3}{4} \in E(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $\theta_2 \in \Delta_2$ ώστε $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Επίσης το θ_2 είναι μοναδικό αφού η Ε είναι 1-1 ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

Άρα υπάρχουν ακριβώς 2 γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$ τέτοιες ώστετο εμβαδόν του

του τριγώνου να ισούται με $\frac{3}{4}$

Γ4. Η Ε είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ και παραγωγίσιμη στα

$\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν:

$$\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) \text{ ώστε } E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - E(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} (A)$$

και

$$\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right) \text{ ώστε } E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) E'(\xi_2) = \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} (B)$$

Από (A) και (B) έπεται ότι

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} + \ln x$$

$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ και $\ln x > 0$ οπότε $f'(x) > 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ και $\ln x < 0$ οπότε $f'(x) < 0$

$f'(1) = 0$

	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ελάχιστο	$\nearrow$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Άρα έχει ελάχιστο για $x_o = 1$ το $f(1) = -\ln\lambda$

Τότε $A(1,-\ln\lambda)$, $\lambda \in (0,+\infty)$

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο ακρότατου της f. Τότε $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\ln\lambda, \lambda > 0 \end{cases}$

Άρα τα σημεία M ανήκουν στην ευθεία $x = 1$

Δ2. Είναι $\quad x^x \geq \lambda x$

$$\Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \quad \text{διότι } \ln x \uparrow \ (0,+\infty)$$

$$\Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \ \ x > 0 \ \ (1)$$

Όμως $f(x) \geq -\ln\lambda$, $\lambda > 0$ για κάθε $x > 0$

Πρέπει $-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει η (1) είναι η $\lambda = 1$

Δ3. Η $g(x) = x^x = e^{x\ln x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $g'(x) = (1+\ln x)e^{x\ln x}$

Η εφαπτομένη της C_g στο $A\big(x_o, g(x_o)\big)$, $x_o > 0$ είναι η

$$\varepsilon: \quad y - g(x_o) = g'(x_o)(x - x_o)$$

$$\Leftrightarrow y - e^{x_o\ln x_o} = (1+\ln x_o)e^{x_o\ln x_o}(x - x_o)$$

Όμως $O(0,0) \in \varepsilon \Leftrightarrow 0 - e^{x_o\ln x_o} = (1+\ln x_o)e^{x_o\ln x_o}(0 - x_o)$

$$\overset{e^{x_o\ln x_o}}{\Leftarrow} \ -e^{x_o\ln x_o} = -x_o e^{x_o\ln x_o} - x_o\ln x_o e^{x_o\ln x_o}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -x_o - x_o\ln x_o$$

$$\Leftrightarrow x_o\ln x_o + x_o - 1 = 0$$

$$\overset{x_o>0}{\Longleftrightarrow} \ln x_o + 1 - \frac{1}{x_o} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_o) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_o = 1$$

Άρα $\varepsilon: \quad y - g(1) = g'(1)(x - 1)$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x$$

Έχουμε ότι $h(x)=\begin{cases} e^{x\ln x}, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Δ4. i) Αρκεί να δείξω ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = h(0)$

Έστω $u = x\ln x,\ x>0$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(u) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1 = h(0)$

Άρα η h είναι συνεχής στο $x_o = 0$

Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

ii) Έστω $A(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)dt,\ \ x\in\mathbb{R}$

Η A είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$A(0) = \int_0^1 h(1-t)dt$

$A(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)dt$

Για $t\in[0,1]$ είναι ότι $h(t)>0$

Όμως $0\le 1-t\le 1$ συνεπώς $h(1-t)>0$

Επίσης η $h(1-t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων οπότε

Άρα $\int_0^1 h(1-t)dt > 0 \Leftrightarrow K(0)>0$

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g''(x) = \dfrac{1}{x}e^{x\ln x} + (1+\ln x)^2 e^{x\ln x}$

τότε $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Τότε η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $A(1,g(1))$ εκτός του σημείου επαφής.

Τότε $g(t)\ge t$, για κάθε $t\in(0,+\infty)$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $t=1$

Τότε $\int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 t\,dt \Leftrightarrow \int_1^2 g(t)\,dt > \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_1^2$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 g(t)\,dt > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\int_1^2 g(t)dt < 0 \Leftrightarrow A(1) < 0$$

Άρα $A(0)\cdot A(1)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $A(x_o)=0$