ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΞΕΛΙΞΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 28

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 59

Α3. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ Β

11, 7, κ, 13, 11, 10

7, 10, 11, 11, 13, κ κ > 0

Β1. $S_x^2 = 4$

$S_x = +\sqrt{S^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{aligned} CV &= \frac{S_x}{|\bar{x}|} = \frac{2}{|\bar{x}|} \\ CV &= \frac{2}{10} \end{aligned}\right\} \frac{2}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow |\bar{x}| = 10$$ κι αφού όλες οι τιμές είναι θετικές, x > 0 οπότε έχουμε

$|\bar{x}| = 10$

Β2. $$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{7+10+11+11+13+\kappa}{6} \\ \bar{x} &= 10 \end{aligned}\right\} \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$$

Β3. Αφού κ = 8, οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13

Επομένως αφού ν = 6, $\frac{\nu}{2} = 3$ και $\delta = \frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5$ και

$R = x_{max} - x_{min} = 13 - 7 = 6$

Β4. Έστω $y_i = x_i - 2$, $i = 1, 2, \ldots, 6$

Τότε από βασική εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ. 99 έχουμε $\begin{cases} \bar{y} = \bar{x} - 2 = 10 - 2 = 8 \\ S_y = S_x = 2 \end{cases}$

Επομένως $CV_y = \dfrac{S_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 > 0{,}1$ ανομοιογενές δείγμα.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}}(x^2 - 2x + 10)'$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = 0 \overset{\sqrt{x^2-2x+10}>0}{\Leftrightarrow} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} > 0 \overset{\sqrt{x^2-2x+10}>0}{\Leftrightarrow} x > 1$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f, φαίνονται στον παρακάτω μεταβολών

x	-∞		1		+∞
f'		−	0	+	
f		↘		↗	

f γνησίως φθίνουσα↓ στο (-∞, 1]

f γνησίως αύξουσα ↑ στο [1, +∞)

Άρα η f εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = \sqrt{1 - 2 + 10} = \sqrt{9} = 3$, επομένως $f(x) \geq f(1) = 3$.

Γ3. Η εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(5, f(5)) είναι της μορφής (ε): y = λx + β, όπου $\lambda = f'(5) = \dfrac{5-1}{\sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10}} = \dfrac{4}{5}$ και

$f(5) = \sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10}$

Συνεπώς $y = \dfrac{4}{5}x + \beta$

Το σημείο Μ(5, 5) ανήκει στην εφαπτομένη ευθεία, άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν:

$5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta \Leftrightarrow 5 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Τελικά η εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας είναι (ε): $y = \frac{4}{5}x + 1$.

Γ4. Για να βρούμε τα σημεία τομής της εφαπτομένης (ε) με τους άξονες:

- για τον x'x θέτουμε $y = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$, επομένως $A(-\frac{5}{4}, 0)$
- για τον y'y θέτουμε $x = 0$, επομένως $y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 1 \Leftrightarrow y = 1$, οπότε Β(0, 1).

ΘΕΜΑ Δ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Δ1. Για $\lambda = 3$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x, \ x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \overset{3 \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (διπλή ρίζα)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Το πρόσημο της f′ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f′		+	0	+	
f		↗		↗	

f γνησίως αύξουσα ↑ στο $(-\infty, 1]$

f γνησίως αύξουσα ↑ στο $[1, +\infty)$

f συνεχής στο $x_0 = 1$

Άρα η f είναι ↑ στο $\mathbb{R}$ κι επομένως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

Αφού $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$ και f ↑ $\mathbb{R}$ τότε $f(\frac{3}{8}) < f(\frac{5}{6})$

Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr

Δ2. Για λ = 3, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, οπότε $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}$

$$\lim_{x\to1}[(\sqrt{x}-1)(x^2-x)] = 0$$

$$\lim_{x\to1}(3x^2 - 6x + 3) = 0$$

Με x «κοντά» στο $x_0 = 1$, έχουμε:

$$\frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)} = \frac{3(x-1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-1)x} = \frac{3(x-1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}^{\,2}-1)(x-1)x} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = \dfrac{3(1+1)}{1} = 6$

Δ3. Έστω M(x, f(x)) το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Τότε $\lambda = f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.

Ζητώ το σημείο στο οποίο η f' παρουσιάζει ελάχιστο.

Είναι $f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

Το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	-∞		1		+∞
f''		−	0	+	
f'		↘		↗	

f' γνησίως φθίνουσα ↓ στο (-∞, 1]

f' γνησίως αύξουσα ↑ στο [1, +∞)

Άρα η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το M(1, f(1)) ή M(1, 1)

Δ4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$

Για να μην παρουσιάζει ακρότατο η f, θα πρέπει η f' να μην έχει δύο άνισες ρίζες κι επομένως θα πρέπει $\Delta \le 0$.

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = (-6)^2 - 4\cdot3\cdot\lambda = 36 - 12\lambda$.

Θα πρέπει $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda \le 0 \Leftrightarrow -12\lambda \le -36 \Leftrightarrow \lambda \ge \frac{-36}{-12} \Leftrightarrow \lambda \ge 3$, άρα η ελάχιστη τιμή είναι $\lambda = 3$.

Κεντρικό Διδακτήριο: Βασ. Αμαλίας 1 & Μιλτιάδου, Πλατεία ΗΣΑΠ Αμαρουσίου, 151 22 Μαρούσι
τηλ.-fax: 210 8028560, 210 6129412 • www.exelixi.edu.gr • info@ekpedefsi.gr