ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α)** Σχολικό βιβλίο, σελ. 15

β) **i.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 35

ii. Σχολικό βιβλίο, σελ. 35 – 36

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135

Α4. **α)** Λ π.χ. $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ (Σχολικό βιβλίο, σελ. 134)

β) Λ π.χ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=2\end{cases}$ (Σχολικό βιβλίο, σελ. 71)

Α5. γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \overset{\substack{u=-x\\ x\to+\infty}}{\Rightarrow} \lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^{u}+\lambda\right)=2 \Rightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=2}$

Β2. Έστω $g(x)=f(x)-x$, $x\in[2, 3]$

- g συνεχής [2, 3] ως πράξεις (διαφορά) συνεχών

- $g(2) = f(2) - 2 = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0$
- $g(3) = f(3) - 3 = e^{-3} + 2 - 3 = e^{3} - 1 = \dfrac{1}{e^3} - 1 = \dfrac{1-e^3}{e^3} < 0$

Άρα $g(2)\cdot g(3) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano στη g στο [2, 3], υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$: $g(x_0) = 0$

Είναι g παραγωγίσιμη $[2, 3] \subseteq \mathbb{R}$

με $g'(x) = -(e^{-x} + 1) < 0$

Άρα g γνησίως φθίνουσα στο [2, 3]

Επομένως x_0 μοναδική

B3. Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -e^{-x} < 0$

Άρα $f \downarrow \mathbb{R}$, άρα και 1 – 1 ως γνησίως μονότονη

Άρα, ορίζεται η f^{-1}

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x} + 2\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x} + 2\right) = 0 + 2 = 2$

$$f((-\infty,+\infty)) \underset{\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\downarrow}{=}} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (2,+\infty)$$

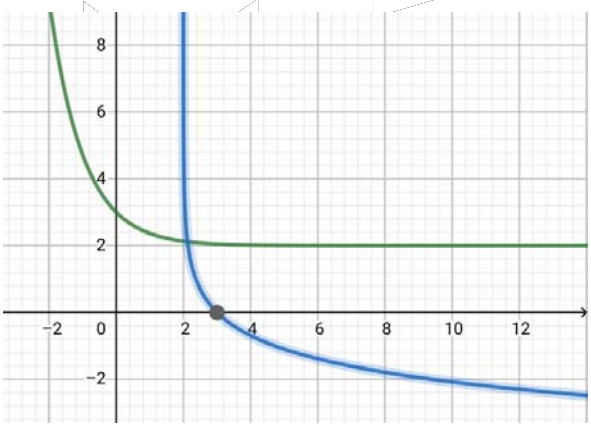
Έστω $y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2$, $y > 2 \Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln(y-2)$, $y > 2$

$\Leftrightarrow -x = \ln(y-2)$, $y > 2 \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$, $y > 2$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$

$$\lim_{x\to2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right] \underset{u\to0^+}{\overset{\substack{u=x-2\\ x\to2^+}}{=}} -\lim_{u\to0^+}\ln u = -(-\infty) = +\infty$$

Άρα η x = 2 κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 1$.

Τότε: $f(1) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) \Leftrightarrow 1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \beta}$

f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Άρα:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-\alpha-1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-\alpha-1}{x-1} \Leftrightarrow 2 = \lim_{x\to1^+}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{\alpha(x-1)}{x-1}\right]$$

$\Leftrightarrow 2 = 1+\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

αφού: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{x-1}}{1} = 1$ άρα $\boxed{\beta = 1}$

Γ2. $f(x) = \begin{cases} x^2+1\,, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x\,, & x<1 \end{cases}$

Στο $(-\infty, 1)$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{x-1}+1 > 0$

Στο $(1, +\infty)$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x > 0$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα $f\uparrow\mathbb{R}$

Είναι: $f((-\infty,1]) \underset{\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\uparrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty,1]$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right) = 0+(-\infty) = -\infty$

Γιατί: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} \underset{u\to-\infty}{\overset{\substack{u=x-1\\x\to-\infty}}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

$f([1,+\infty)) \underset{\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\uparrow}{=}} \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [2,+\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Γ3. **i.** $0\notin f([1, +\infty))$, άρα δεν υπάρχει $x_0\in[1, +\infty)$: $f(x_0) = 0$

$0\in f((-\infty, 0))$, άρα υπάρχει από Θ.Ε.Τ. ένα τουλάχιστον $x_0\in(-\infty, 0)$: $f(x_0) = 0$

και επειδή f γνησίως μονότονη σ' αυτό, το x_0 είναι μοναδικό

Διότι: $f((1,+\infty)) \underset{\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\uparrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right) = \left(-\infty, \dfrac{1}{e}\right)$

ii. Έστω $h(x) = f^2(x) - x_0 f(x)$, $x \in (x_0, +\infty)$

Έστω ότι η $h(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = x_1$

Τότε: $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) - x_0 f(x_1) = 0$

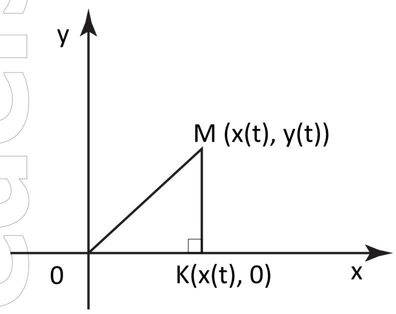
$\Leftrightarrow f(x_1)(f(x_1) - x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 0$ ή $f(x_1) = x_0$

Όμως $f(x_1) = 0$ αδύνατη, αφού η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = x_0$ από Γ3(i).

Επιπλέον η $f(x_1) = x_0$ αδύνατη, αφού $x > x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και $x_0 < 0$

Γ4. $(MOK)(t) = E(t) = \dfrac{1}{2}|x(t)| \cdot |y(t)| = \dfrac{1}{2} x(t) \cdot \left(x^2(t) + 1\right) = \dfrac{1}{2}\left(x^3(t) + x(t)\right)$

$E'(t) = \dfrac{1}{2}\left(3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)\right)$



Την $t = t_0$: $x(t_0) = 3$ μον

$y(t_0) = 2$ μον

$x'(t_0) = 2$ μον/sec

$E'(t_0) = \dfrac{1}{2}\left(3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2\right) = \dfrac{1}{2} 56 = 28$ τετρ. μον. / sec

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = (x - 1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

Αφού η (ε): $y = -x + 1$ εφάπτεται της C_f στο Α

είναι: $f(1) = 1$ και $f'(1) = -1$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$

$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha + (x - 1)\dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$

$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$

Άρα $\boxed{\beta = 2}$

Δ2. $E(\Omega) = \int_1^2 (x - 1)\ln(x^2 - 2x + 2)dx$

Είναι $x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Έστω $h(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

h παραγωγίσιμη με $h'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2-2x+2} \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Είναι:

x	1		2
$h'(x)$	0	$+$	
h	0	$\nearrow$	

Άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Συνεπώς $(x-1)\ln(x^2-2x+2) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

Άρα $E(\Omega) = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$

Θέτω $u = x^2 - 2x + 2$

άρα $du = (2x-2)dx$

Για $x = 1$, $u = 1$

Για $x = 2$, $u = 2$

Τότε $E(\Omega) = \dfrac{1}{2}\int_1^2 \ln u\, du = \dfrac{1}{2}\int_1^2 (u)'\ln u\, du = \dfrac{1}{2}[u\ln u]_1^2 - \dfrac{1}{2}\int_1^2 du = \dfrac{1}{2}2\ln 2 - \dfrac{1}{2}[u]_1^2 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$ τ. μον.

Δ3. **i.** $f'(x) = \ln(x^2-2x+2) + \dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1$

$$f''(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{4(x-1)(x^2-2x+2) - (2x-2)\cdot 2\cdot(x-1)^2}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-2x+2) + 4(x-1)(x^2-2x+2) - 4(x-1)^3}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)\left[x^2-2x+2+2x^2-4x+4-2x^2+4x-2\right]}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 1}$

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(x) \geq f'(1) \Leftrightarrow f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$

Υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$

Από **Δ3. i.** έχουμε: $f'(\xi)\geq-1 \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$

Δ4. Από Δ3(i) είναι $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το ίσον ισχύει για $x = 1$

Αν δειχθεί ότι $g'(x)\leq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

$g'(x) = 3x^2 - 1$

$g''(x) = -6x$

x		0	
g''(x)	+	0	-
g'	↗	M	↘

Άρα $g'(x)\leq g'(0) \Leftrightarrow g'(x)\leq -1$

Είναι $g'(0) = -1$ και $f'(1) = -1$

Άρα οι C_f και C_g δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη στα σημεία Α(1, 1) και Β(0, 2) αντίστοιχα με εξίσωση:

(ε): $y - g(0) = g'(0)\cdot(x - 0)$

$y - 2 = -x \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 2}$

Επαλήθευση

(ε): $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 2}$

ΣΧΟΛΙΟ:

Τα φετινά θέματα εξέταζαν αρκετά μεγάλο μέρος της ύλης. Απαιτούσαν ικανότητα σε πράξεις και άρτια γνώση της θεωρίας. Η διαβάθμιση της δυσκολίας κρίνεται ικανοποιητική. Το άριστα θα κριθεί στο ερώτημα Δ4.